Личный официальный сайт
Мартыненко Дмитрия Романовича
http://www.dmr2.ru

Официальная публикация

№ 14 *«11» мая 2011 г.*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра математического анализа

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Тема:

«О среднем значении одной арифметической функции»

Выполнил:
студент 501 группы
Мартыненко Дмитрий Романович

Научный руководитель:
доцент к.ф.-м.н.
Бегунц А. В.

Москва

2011

Содержание

1. Введение

Цель работы
Целью работы является получение асимптотической формулы для среднего значения функции $\frac{1}{\sigma(n)}$, где $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n.

Задачи работы
а) изучение метода контурного интегрирования;
б) представление суммы исследуемой функции в необходимом виде для применения метода контурного интегрирования;
в) оценка выражений, участвующих в вычислениях.

Актуальность исследования
Большую роль в теории чисел играет получение асимптотик сумматорных функций вида $\Phi(x) = \sum\limits_{n\leqslant x} f(n)$. Тогда выражение $\frac{1}{x}\Phi(x)$ будет представлять собой «среднее значение» функции $f(n)$.

Классическими задачами являются задачи получения асимптотик для $f(n) = \varphi(n)$, $\sigma(n)$, $\tau(n)$. В статье [10] получена асимпотическая формула для среднего значения функции В. И. Арнольда $A(n) = \frac{\sigma(n)}{\tau(n)}$. Нетрудно заметить, что эта формула представляет собой среднее значение делителя натурального числа n.

Помимо упомянутых, вычислялись асимптотические формулы и для других, более сложно устроенных, мультипликативных функций, например, $\frac{1}{\varphi(n)}$ и $\frac{\tau(n)}{\varphi(n)}$.

Рассмотрим теперь функцию $\Psi(x) = \sum\limits_{n\leqslant x} \dfrac{1}{\sigma(n)}$.

Известно [8, теорема 323], впервые получено в статье [6], что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n\ln\ln n} = e^{\gamma}.$$

Следовательно, для достаточно больших n выполняется неравенство

$$\sigma(n) < e^{\gamma}(1+\varepsilon)n\ln\ln n.$$

Последнее утверждение позволяет заключить, что ряд $\sum \frac{1}{\sigma(n)}$ расходится, поскольку расходится ряд $\sum \frac{1}{n\ln\ln n}$. Следовательно, возникает естественный вопрос о скорости роста функции $\Psi(x)$, и получение асимптотической формулы представляет интерес.

2. Основные определения и обозначения

Буквами n, m, k, l будем обозначать натуральные числа, буквой p — простые числа, буквой x — вещественные числа, буквой s — комплексные числа ($s = \sigma + it$, где $\sigma = \operatorname{Re} s$, $t = \operatorname{Im} s$ — соответственно, вещественная и мнимая части числа s).

Функция $f(n)$ называется мультипликативной, если для любых взаимно простых чисел m и n верно равенство $f(mn) = f(m)f(n)$. Таким образом, мультипликативную функцию достаточно задать на степенях простых чисел.

Функция $\sigma(n)$ — сумма натуральных делителей числа n.

$$\sigma(n) = \sum_{m|n} m, \qquad \sigma(p^k) = \frac{p^{k+1}-1}{p-1}.$$

Функция $\tau(n)$ — количество натуральных делителей числа n.

$$\tau(n) = \sum_{m|n} 1, \qquad \tau(p^k) = k+1.$$

При положительном A записи $B = O(A)$, $B \ll A$ означают, что $|B| \leqslant cA$ для некоторого положительного вещественного числа c; знак $\gg$ определяется аналогично.

3. Предварительные утверждения

Тождество Эйлера.
Для мультипликативной функции $f(n)$ выполняется равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right).$$

Лемма. Ряд $\sum \frac{1}{n \ln \ln n}$ расходится.
Доказательство. Имеем:

$$\frac{1}{n \ln \ln n} > \frac{1}{n \ln n}.$$

Ряд $\sum \frac{1}{n \ln n}$, как известно, расходится [1, стр. 333, пример 3]. Следовательно, по признаку сравнения [1, стр. 335, теорема 4], расходится и исходный ряд.

Теорема [4, стр. 427, теорема 3.1]. Пусть ряд $f(s) = \sum\limits_n a_n n^{-s}$ при $\sigma > 1$ абсолютно сходится, $|a_n| \leqslant A(n)$, где $A(n) > 0$ — монотонно возрастающая функция и при $\sigma \to 1+0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O\left((\sigma - 1)^{-\alpha}\right), \quad \alpha > 0.$$

Тогда при любых $w,\ \operatorname{Re} w = u > 1 - b,\ \mathrm{const} = b_0 \geqslant b > 0,\ T \geqslant 1,\ x = l + \frac{1}{2}$ имеет место формула

$$\Phi(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n^w} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-iT}^{b+iT} f(s+w) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{T(u-1+b)^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{x^{1-u} A(2x) \ln 2x}{T}\right),$$

где постоянная в знаке O зависит только от b_0.

Критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения [1, стр. 393, теорема 23].

Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

4. Получение асимптотической формулы

Теорема. При $x \to \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\Psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\sigma(n)} = A_1 \ln x + A_2 + O\left(\frac{\ln^2 x}{x^{2/3}}\right),$$

где A_1 и A_2 — некоторые вещественные константы.

Доказательство проведём методом контурного интегрирования. Рассмотрим ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sigma(n)n^s}$. Из тождества Эйлера и явной формулы для $\sigma(p^k)$ получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma(n)n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{p-1}{(p^2-1)p^s} + \frac{p-1}{(p^3-1)p^{2s}} + \ldots\right) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p-1}{(p^{k+1}-1)p^{ks}} =$$

$$= \zeta(s+1) \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{s+1}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p-1}{(p^{k+1}-1)p^{ks}} = \zeta(s+1)F(s).$$

Исследуем функцию $F(s)$, определённую последним равенством. Для этого представим её в виде

$$F(s) = \prod_p f_p(s), \qquad f_p(s) = \left(1 - p^{-s-1}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p-1}{p^{k+1}-1} p^{-ks}.$$

Лемма 1. Число $F(0)$ корректно определено ($F(s)$ имеет конечное значение в точке $s = 0$).
Доказательство.

$$f_p(0) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p-1}{p^{k+1}-1} = \frac{p-1}{p}(p-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - 1} = \frac{(p-1)^2}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k} \frac{1}{1-p^{-k}} =$$

$$= \frac{p^2 - 2p + 1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} (p^{-k} + p^{-2k} + p^{-3k} + \ldots) = \left(p - 2 + \frac{1}{p}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k|n} \frac{1}{p^n} =$$

$$= \left(p - 2 + \frac{1}{p}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{p^n} = \left(p - 2 + \frac{1}{p}\right) \left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)\right) =$$

$$= 1 + \frac{2}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) - \frac{2}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

$$F(0) = \prod_p f_p(0) = \prod_p \left(1 + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right).$$

Полученное бесконечное произведение сходится абсолютно по критерию абсолютной сходимости бесконечного произведения, так как сходится ряд $\sum \left|O\left(\dfrac{1}{p^2}\right)\right|$. Лемма доказана.

Введём обозначение

$$A_1 = F(0) = \prod_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{(p-1)^2}{p^k - 1}.$$

Лемма 2. $F'(s)$ имеет конечное значение в точке $s = 0$.
Доказательство. Для $F = \prod\limits_{p} f_p$ по формуле Лейбница имеем:

$$F' = \sum_{p} \frac{f_p'}{f_p} \prod_{p} f_p = F \sum_{p} \frac{f_p'}{f_p}.$$

Следовательно,

$$F'(0) = F(0) \sum_{p} \frac{f_p'(0)}{f_p(0)},$$

если последняя сумма сходится.

Вычислим производную:

$$f_p'(s) = p^{-s-1} \ln p \sum_{k=0} \frac{p-1}{p^{k+1}-1} p^{-ks} + (1 - p^{-s-1}) \sum_{k=0} \frac{p-1}{p^{k+1}-1} (-k \ln p) p^{-ks}$$

и найдём её значение в нуле:

$$f_p'(0) = (p-1) \ln p \left(\frac{1}{p} \sum_{k=0} \frac{1}{p^{k+1}-1} + \frac{1}{p} \sum_{k=0} \frac{k}{p^{k+1}-1} - \sum_{k=0} \frac{k}{p^{k+1}-1} \right) =$$

$$= (p-1) \ln p \left(\frac{1}{p} \sum_{k=0} \frac{k+1}{p^{k+1}-1} - \sum_{k=0} \frac{k+1}{p^{k+1}-1} + \sum_{k=0} \frac{1}{p^{k+1}-1} \right) =$$

$$= (p-1) \ln p \left(\left(\frac{1}{p} - 1 \right) \sum_{n=1} \frac{\sigma(n)}{p^n} + \sum_{n=1} \frac{\tau(n)}{p^n} \right) =$$

$$= (p-1) \ln p \left(\left(\frac{1}{p} - 1 \right) \left(\frac{1}{p} + \frac{3}{p^2} + \frac{4}{p^3} + O\left(\frac{1}{p^4} \right) \right) + \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3} + O\left(\frac{1}{p^4} \right) \right) =$$

$$= (p-1) \ln p \left(\frac{1}{p^3} + O\left(\frac{1}{p^4} \right) \right) = \ln p \left(\frac{1}{p^2} + O\left(\frac{1}{p^3} \right) \right).$$

В вычислениях использовано полученное ранее выражение

$$\sum_{k=0} \frac{1}{p^{k+1}-1} = \sum_{n=1} \frac{\tau(n)}{p^n},$$

а также аналогичное выражение, следующее из цепочки равенств:

$$\sum_{k=0} \frac{k+1}{p^{k+1}-1} = \sum_{l=1} \frac{l}{p^l(1-p^{-l})} = \sum_{l=1} l(p^{-l} + p^{-2l} + p^{-3l} + \dots) = \sum_{n=1} \frac{1}{p^n} \sum_{l|n} l = \sum_{n=1} \frac{\sigma(n)}{p^n}.$$

Для выражения в знаменателе имеем:

$$f_p(0) = \left(1 + O\left(\frac{1}{p^2} \right) \right)^{-1} = 1 + O\left(\frac{1}{p^2} \right),$$

а для полученной выше суммы:

$$\sum_p \frac{f_p'(0)}{f_p(0)} = \sum_p \left(1 + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right) \ln p \left(\frac{1}{p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)\right) = \sum_p \ln p \left(\frac{1}{p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)\right).$$

Последний ряд, очевидно, сходится, так как $\dfrac{\ln p}{p^2} = O\left(\dfrac{1}{p^{2-\delta}}\right)$, следовательно, сходится и сумма $\sum\limits_p \dfrac{f_p'(0)}{f_p(0)}$.

Положим $B = \sum\limits_p \dfrac{f_p'(0)}{f_p(0)}$. Тогда $F'(0) = F(0)B$. Положим

$$A_2 = F(0)\gamma + F'(0) = F(0)(\gamma + B) =$$

$$= \left(\prod_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(p-1)^2}{p(p^k-1)}\right)\left(\gamma + \sum_p \frac{\ln p \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-pk+p}{p^k-1}\right)}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^k-1}}\right).$$

Теперь докажем более общее утверждение, а именно аналитичность функции $F(s)$ в области $\operatorname{Re} s > -1$.

Лемма 3. Пусть $\operatorname{Re} s = -1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда $|f_p(s)| \leqslant 1 + \dfrac{1}{p^{1+\varepsilon}} + O\left(\dfrac{1}{p^3}\right)$.

Доказательство.

Преобразуем выражение для $f_p(s)$:

$$f_p(s) = (1 - p^{-s-1})(p-1) \sum_{k=0} \frac{p^{-ks}}{p^{k+1}-1} = (p-1)\left(\sum_{k=0} \frac{p^{-ks}}{p^{k+1}-1} - \sum_{k=0} \frac{p^{-(k+1)s}}{p(p^{k+1}-1)}\right) =$$

$$= (p-1)\left(\frac{1}{p-1} + \sum_{l=1} \frac{p^{-ls}}{p^{l+1}+1} - \sum_{l=1} \frac{p^{-ls}}{p(p^l-1)}\right) =$$

$$= 1 + (p-1)\sum_{l=1} p^{-ls}\left(\frac{1}{p^{l+1}-1} - \frac{1}{p(p^l-1)}\right) = 1 + (p-1)\sum_{l=1} p^{-ls} \frac{p^{l+1} - p - p^{l+1} + 1}{(p^{l+1}-1)p(p^l-1)} =$$

$$= 1 - (p-1)^2 \sum_{l=1} \frac{p^{-ls}}{(p^{l+1}-1)p(p^l-1)}.$$

Пусть $\operatorname{Re} s = -1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда

$$|f_p(s)| \leqslant 1 + (p-1)^2 \sum_{l=1} \frac{p^{l(1-\varepsilon)}}{(p^{l+1}-1)p(p^l-1)} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{p^{\varepsilon}}(p-1)^2 \sum_{l=1} \frac{p^{l-1}}{(p^{l+1}-1)(p^l-1)} = 1 + \frac{1}{p^{\varepsilon}} D = 1 + \frac{1}{p^{\varepsilon}}(p-1)^2 D_1.$$

Рассмотрим выражение $D_1 = \sum_{l=1} \frac{p^{l-1}}{(p^{l+1}-1)(p^l-1)}$ (ряд, очевидно, сходится).

$$D_1 = \sum_{l=1} \frac{p^{l-1}}{(p^{l+1}-1)(p^l-1)} = \sum_{l=1} \frac{1}{p^{l+2}} \left(\sum_{a=0} p^{-la}\right) \left(\sum_{b=0} p^{-(l+1)b}\right) = \sum_{n=0} \frac{v_n}{p^n},$$

где v_n — число решений уравнения $n = l + 2 + la + (l+1)b$ на множестве $l \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}_0$.

Для v_n имеет место грубая оценка $v_n = O(n^3)$, т.к. a, b, $l \leqslant n$ заведомо, поэтому сходимость не нарушится.

Вычислим v_n для $n = 0$, 1, 2, 3, 4.

$$n = l + 2 + la + (l+1)b,$$

$$n - 2 = l + la + (l+1)b > 0 \quad \Rightarrow \quad n > 2,$$

а для $n = 0, 1, 2$ решения отсутствуют, то есть

$$v_0 = v_1 = v_2 = 0.$$

Пусть $n = 3$. Тогда $1 = l + la + (l+1)b$, то есть $l \leqslant 1$, но решения ищутся среди $l \geqslant 1$. Следовательно, единственной возможностью для l остаётся значение 1. Подставляя это значение в последнее уравнение, получаем: $0 = a + 2b$. С учётом условия $a, b \geqslant 0$ получаем единственное решение $(l, a, b) = (1, 0, 0)$.

$$v_3 = 1.$$

Пусть $n = 4$. Тогда $2 = l + la + (l+1)b$, следовательно $l \leqslant 2$, но решения ищутся среди $l \geqslant 1$. Следовательно, l может принимать не более двух значений: 1 и 2. Подставляя эти значения в последнее уравнение, получаем:
а) $l = 1$. Тогда $1 = a + 2b$. С учётом условия $a, b \geqslant 0$ получаем решение $a = 1$, $b = 0$.
б) $l = 2$. Тогда $0 = 2a + 3b$. С учётом условия $a, b \geqslant 0$ получаем решение $a = b = 0$.
Таким образом, при $n = 4$ получаем два решения, то есть

$$v_4 = 2.$$

Значит,

$$D_1 = \frac{1}{p^3} + \frac{2}{p^4} + O\left(\frac{1}{p^5}\right),$$

$$D = (p-1)^2 \left(\frac{1}{p^3} + \frac{2}{p^4} + O\left(\frac{1}{p^5}\right)\right) = (p^2 - 2p + 1)\left(\frac{1}{p^3} + \frac{2}{p^4} + O\left(\frac{1}{p^5}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + O\left(\frac{1}{p^3}\right) - \frac{2}{p^2} = \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^3}\right).$$

$$|f_p(s)| \leqslant 1 + \frac{1}{p^\varepsilon} D = 1 + \frac{1}{p^{1+\varepsilon}} + O\left(\frac{1}{p^3}\right),$$

что и требовалось доказать.

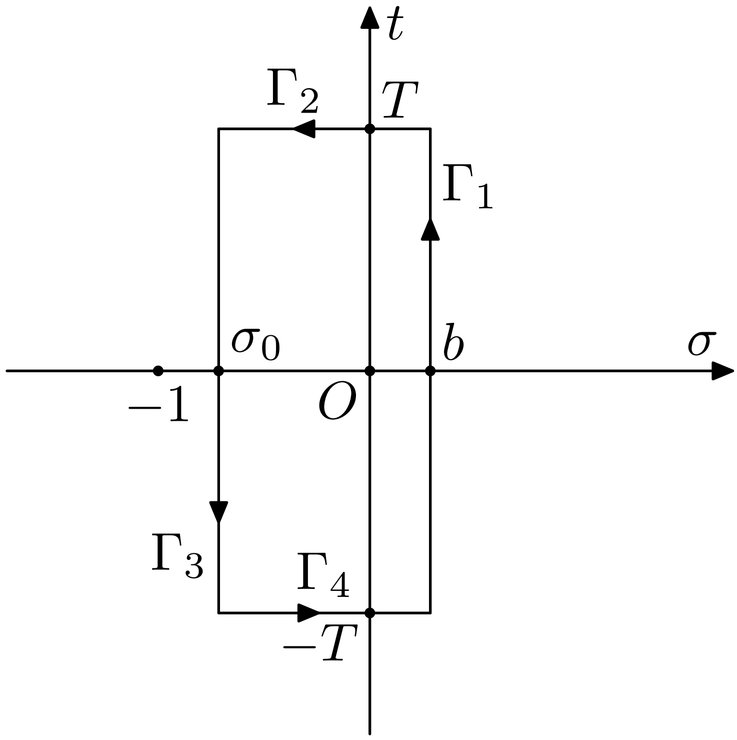

Рис. 1. Контур интегрирования

Следствие. $F(s)$ аналитична в области $\operatorname{Re} s > -1$.

Доказательство. $|F(s)| = \prod\limits_p |f_p(s)| \leqslant \prod\limits_p \left(1 + \frac{1}{p^{1+\varepsilon}} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)\right)$, а последнее произведение сходится по критерию абсолютной сходимости бесконечного произведения.

Лемма 4. Пусть $A(n) = 1$ и $n > 1$. Тогда $\dfrac{n}{\sigma(n)} \leqslant A(n)$.

Доказательство. Поскольку у числа $n > 1$ всегда имеется как минимум два делителя: 1 и само число n, то $\sigma(n) \geqslant n+1$. Тогда $\dfrac{n}{\sigma(n)} \leqslant \dfrac{n}{n+1} \leqslant 1 = A(n)$. Лемма доказана.

Пользуясь леммой 4 и следствием из леммы 3, применим теорему о контурном интегрировании. Положим $a_n = \dfrac{n}{\sigma(n)}$, $f(s) = \zeta(s)F(s-1)$, $A(n) = 1$. Т.к. $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \gamma + \gamma_1(s-1) + \ldots$, то положим $\alpha = 1$. Также положим $w = u = 1$. Рассмотрим замкнутый контур Γ (см. рис. 1), где в качестве σ_0 возьмём $-1+\varepsilon$. Параметры b, T и ε выберем позднее. Утверждение теоремы принимает вид:

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\sigma(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \zeta(s+1)F(s)\frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{bT}\right) + O\left(\frac{\ln 2x}{T}\right).$$

Заметим, что последнее слагаемое не содержит b и при больших x эквивалентно $O\left(\frac{\ln x}{T}\right)$, то есть оба последних слагаемых не могут дать остатка, лучшего, чем $O\left(\frac{\ln x}{T}\right)$. Заметим, что при $b = \frac{1}{\ln x}$ предпоследнее слагаемое равно $O\left(\frac{\ln x}{T}\right)$, и потому оба слагаемых могут быть заменены на одно $O\left(\frac{\ln x}{T}\right)$.

Внутри выбранного контура подынтегральная функция является аналитической, за исключением полюса в точке $s = 0$, следовательно, по теореме Коши о вычетах имеем:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\sigma(n)} = \operatorname*{Res}_{s=0}\left(\zeta(s+1)F(s)\frac{x^s}{s}\right) + O\left(\int\limits_{\Gamma_2}\zeta(s+1)F(s)\frac{x^s}{s}ds\right) + O\left(\int\limits_{\Gamma_3}\zeta(s+1)F(s)\frac{x^s}{s}ds\right) +$$

$$+O\left(\int\limits_{\Gamma_4}\zeta(s+1)F(s)\frac{x^s}{s}ds\right) + O\left(\frac{\ln x}{T}\right).$$

Вычислим вычет подынтегральной функции в точке $s = 0$:

$$\zeta(s+1) = \frac{1}{s} + \gamma + \ldots\,,$$

$$x^s = e^{s\ln x} = 1 + s\ln x + \ldots\,,$$

$$F(s) = F(0) + F'(0)s + \ldots\,.$$

Отсюда

$$\zeta(s+1)F(s)\frac{x^s}{s} = \left(\frac{1}{s} + \gamma + \ldots\right)\left(\frac{1}{s} + \ln x + \ldots\right)(F(0) + F'(0)s + \ldots) =$$

$$= \frac{F(0)}{s^2} + \frac{1}{s}\left[F(0)(\ln x + \gamma) + F'(0)\right] + \ldots\,.$$

Значит, $\operatorname*{Res}_{s=0}\left(\zeta(s+1)F(s)\frac{x^s}{s}\right) = F(0)(\ln x + \gamma) + F'(0) = A_1\ln x + A_2$.

Для дальнейших вычислений потребуется оценка функции $F(s)$ при $\operatorname{Re} s = -1 + \varepsilon$.

Лемма 5. Пусть $\operatorname{Re} s = -1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда $|F(s)| \ll \dfrac{1}{\varepsilon}$.
Доказательство. Пользуясь результатом леммы 3, получаем:

$$|F(s)| \leqslant \prod_p\left(1 + \frac{1}{p^{1+\varepsilon}} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)\right) = \zeta(1+\varepsilon)\prod_p\left(1 - \frac{1}{p^{1+\varepsilon}}\right)\left(1 + \frac{1}{p^{1+\varepsilon}} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)\right) =$$

$$= \zeta(1+\varepsilon)\prod_p\left(1 - \frac{1}{p^{2+2\varepsilon}} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)\right) \ll \zeta(1+\varepsilon) \ll \frac{1}{\varepsilon}.$$

При оценке интегралов будем пользоваться следующими оценками ζ-функции Римана [5, глава V, стр. 97]:

$$|\zeta(\sigma + it)| \ll t^{\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}}\ln t, \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \geqslant t_0,$$

$$|\zeta(\sigma + it)| \ll \ln t, \quad \text{при} \quad \sigma \geqslant 1, \quad |t| \geqslant t_0.$$

Первую оценку для удобства перепишем в виде:

$$|\zeta(\sigma + 1 + it)| \ll t^{-\frac{\sigma}{2}}\ln t, \quad \text{при} \quad -1 \leqslant \sigma \leqslant 0.$$

Интегралы по контурам Γ_2, Γ_3, Γ_4 назовём I_2, I_3 и I_4 соответственно. Оценим их:

$$|I_3| \ll \left| \int\limits_{\Gamma_3} \zeta(s+1)F(s)\frac{x^s}{s}ds \right| \ll \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-T}^{T} t^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\ln t \frac{x^{-1+\varepsilon}}{|-1+\varepsilon+it|}dt \ll$$

$$\ll \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{0}^{1} t^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\ln t \frac{x^{-1+\varepsilon}}{-1+\varepsilon}dt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{1}^{T} t^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\ln t \frac{x^{-1+\varepsilon}}{t}dt \ll$$

$$\ll \frac{1}{\varepsilon}x^{-1+\varepsilon}\ln T\left(\int\limits_{0}^{1} t^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}dt + \int\limits_{1}^{T} t^{-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}dt\right) \ll \frac{T^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\ln T}{\varepsilon x^{1-\varepsilon}}.$$

Заметим, что интегралы I_2 и I_4 равны по абсолютной величине и оцениваются следующим образом:

$$|I_4| = |I_2| \ll \left| \int\limits_{\Gamma_2} \zeta(s+1)F(s)\frac{x^s}{s}ds \right| \ll \frac{1}{\varepsilon}\left(\int\limits_{-1+\varepsilon}^{0} T^{-\frac{\sigma}{2}}\ln T\frac{|x^{\sigma+iT}|}{|\sigma+iT|}d\sigma + \int\limits_{0}^{\frac{1}{\ln x}} \ln T\frac{|x^{\sigma+iT}|}{|\sigma+iT|}d\sigma\right) \ll$$

$$\ll \frac{\ln T}{T\varepsilon}\left(\int\limits_{-1+\varepsilon}^{0}\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right)^{\sigma}d\sigma + \int\limits_{0}^{\frac{1}{\ln x}} x^{\sigma}d\sigma\right) \ll$$

$$\ll \frac{\ln T}{T\varepsilon}\left(\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right)} - \frac{\left(\frac{\sqrt{T}}{x}\right)^{1-\varepsilon}}{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right)}\right) + \frac{e-1}{\ln x}\right) \ll \frac{\ln T}{T\varepsilon\ln x}, \quad \text{если} \quad T \ll x^{2-\varepsilon'}.$$

Собрав все результаты, получаем

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\sigma(n)} = A_1\ln x + A_2 + O\left(\frac{T^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}\ln T}{\varepsilon x^{1-\varepsilon}}\right) + O\left(\frac{\ln T}{T\varepsilon\ln x}\right) + O\left(\frac{\ln x}{T}\right).$$

В качестве ε удобно взять $\frac{1}{\ln x}$. Тогда

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\sigma(n)} = A_1\ln x + A_2 + O\left(\frac{T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\ln x}}\ln T\ln x}{x} + \frac{\ln T}{T} + \frac{\ln x}{T}\right).$$

Для того чтобы остаточные члены были одного порядка, выберем T из условия $\frac{\sqrt{T}}{x} = \frac{1}{T}$, т. е. $T = x^{2/3}$ и окончательно имеем:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{\sigma(n)} = A_1\ln x + A_2 + O\left(\frac{\ln^2 x}{x^{2/3}}\right).$$

5. Список литературы

[1] *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2004.

[2] *Чубариков В. Н.* Элементы арифметики. М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2007.

[3] *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. СПб.: Лань, 2009.

[4] *Прахар К.* Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.

[5] *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана. М.: Издательство иностранной литературы, 1953.

[6] *Gronwall T. H.* «Some asymptotic expressions in the theory of numbers», Transactions of the American Mathematical Society, 1913, № 14, с. 113—122.

[7] *Robin G.* «Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothese de Riemann», Journal de Mathematiques Pures et Appliquees. Neuvieme Serie, 1984, № 63 (2), с. 187–213.

[8] *Hardy G. H., Wright E. M.* An introduction to the theory of numbers, Oxford Univercity Press, 1968.

[9] *Горяшин Д. В.* «Аналоги проблемы делителей Титчмарша», Чебышевский сборник, том 8, выпуск 2, 2007, с. 44–55.

[10] *Муканова А. Т.* «Асимптотическая формула для среднего значения функции В. И. Арнольда», Вестник Московского университета, серия 1 (Математика и механика), 2008, № 2, с. 51–53.

Engl. transl.: On the mean value of a certain arithmetical function.